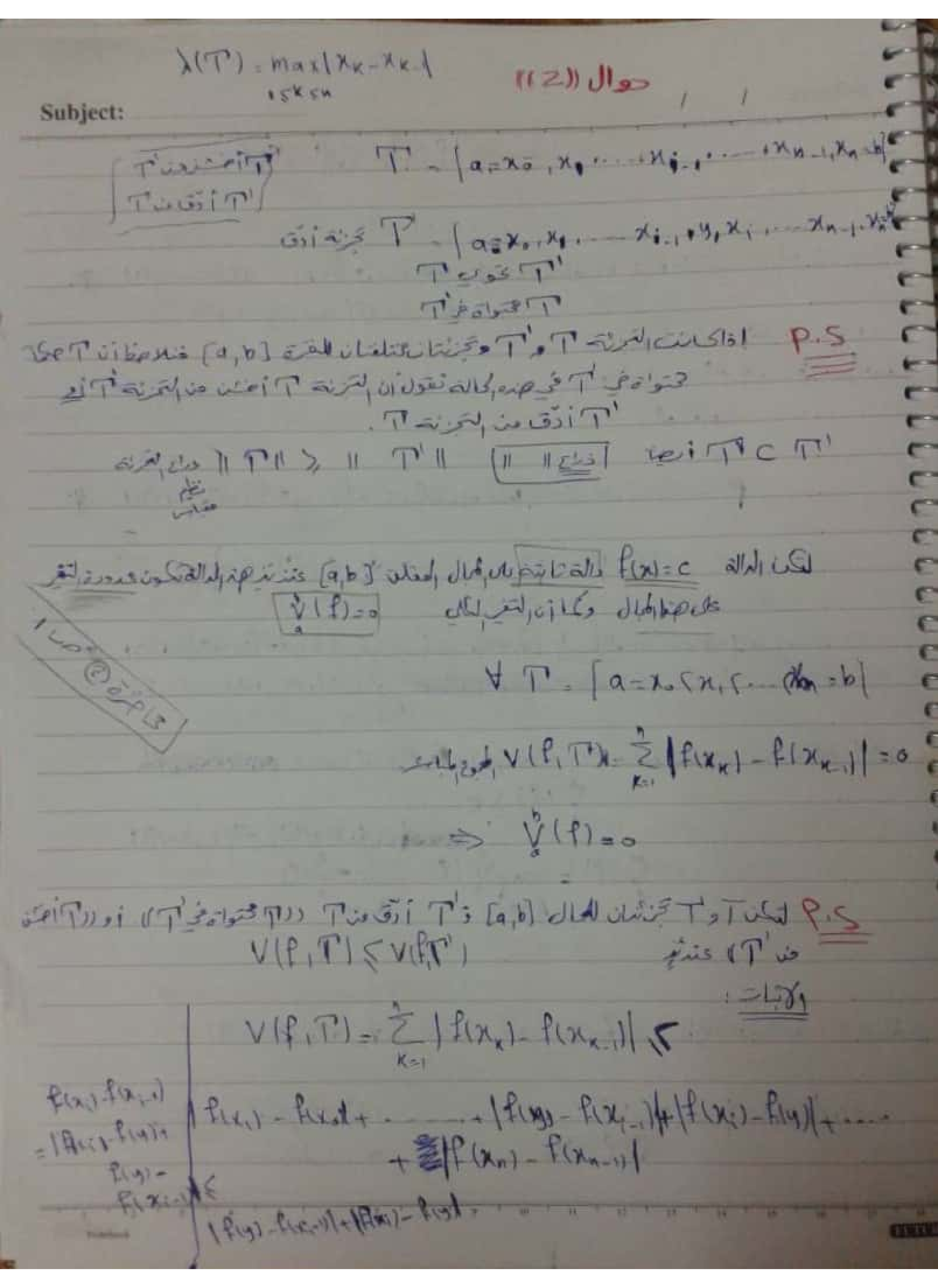


$\lambda(T) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - x_{k-1}|$

سؤال ((2))

Subject:

$T^{'}$ تحتوي على T / $T^{'}$ أدق من T

$T = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$

$T^{'} = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ تجزئة أدق

$T^{'}$ تحتوي T

T محتواة في $T^{'}$

P.S إذا كانت التجزئة T و $T^{'}$ تجزئتان للفترة $[a,b]$ فنلاحظ أن T محتواة في $T^{'}$ في هذه الحالة نقول أن التجزئة T أخشن من التجزئة $T^{'}$ أو $T^{'}$ أدق من التجزئة T.

$T \subset T^{'}$ أيضاً $\|\;\|$ نظيم $\|T^{'}\| \le \|T\|$ نظيم التجزئة

لتكن الدالة $f(x) = c$ دالة ثابتة على المجال المغلق $[a,b]$ عندئذ تكون الدالة محدودة التغير على هذا المجال ويكون التغير الكلي $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$

$\forall\, T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

$V(f, T) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = 0$

$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$

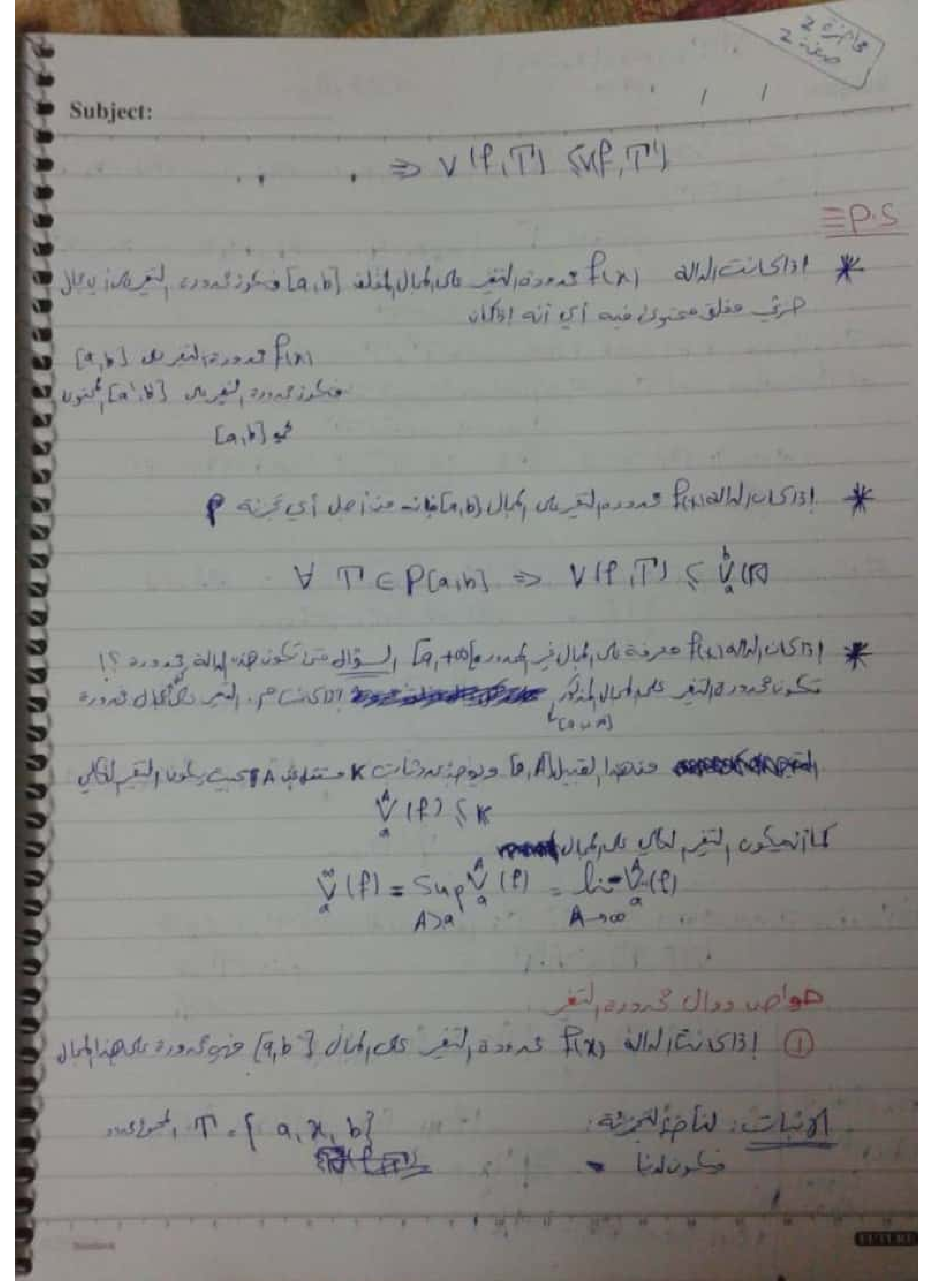
P.S لتكن T و $T^{'}$ تجزئتان للمجال $[a,b]$ و $T^{'}$ أدق من T ((محتواة في $T^{'}$)) أو ((T أخشن من $T^{'}$)) عندئذٍ $V(f, T) \le V(f, T^{'})$

الإثبات:

$V(f, T) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le$

$|f(x_1) - f(x_0)| + \ldots + |f(y) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(y)| + \ldots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = |f(x_i) - f(y) + f(y) - f(x_{i-1})| \le |f(y) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(y)|$



صفحة 2

Subject:

$\Rightarrow V(f,T') \le V(f,T'')$

P.S

* إذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة التغير على المجال المغلق $[a,b]$ فتكون محدودة التغير على أي مجال جزئي مغلق محتوى فيه أي أنه إذا كان

$f(x)$ محدودة التغير على $[a,b]$
فتكون محدودة التغير على $[a',b']$ المحتوى في $[a,b]$

* إذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة التغير على المجال $[a,b]$ فإنه من أجل أي تجزئة P

$$\forall T \in P[a,b] \Rightarrow V(f,T) \le V_a^b(f)$$

* إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على المجال غير المحدود $[a,+\infty[$ السؤال متى تكون هذه الدالة محدودة التغير؟! تكون محدودة التغير على المجال المذكور $[a,\infty[$ إذا كانت م. التغير على كل مجال محدود $[a,A]$ ووجد عدد ثابت K مستقل عن A بحيث يكون التغير الكلي

$$V_a^A(f) \le K$$

كما أنه يكون التغير الكلي على المجال

$$V_a^\infty(f) = \sup_{A>a} V_a^A(f) = \lim_{A\to\infty} V_a^A(f)$$

خواص دوال محدودة التغير

① إذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة التغير على المجال $[a,b]$ فهي محدودة على هذا المجال

الإثبات: لنأخذ التجزئة $T = \{a, x, b\}$
فيكون لدينا

sup ② محاضرة

Subject: / /

محدودة التغير ⇐ محدودة والعكس غير صحيح

$$V(f,T) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

ومن خاصية ثانية يكون لدينا:

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$

$$\leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| = M$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq M \; ; \forall x \in [a,b]$$

ان عكس الخاصية السابقة غير صحيح بشكل عام اي اذا كانت $f(x)$ محدودة فليس من الضرورة ان تكون محدودة التغير

مثال لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

نلاحظ أن هذه الدالة مستمرة على المجال $[0,1]$ ومحدودة على هذا المجال في حين هذه الدالة ليست محدودة التغير (المقصود مثال سابق)

② إذا كانت $f(x)$ دالة م.ت على $[a,b]$ فإن كل من الدوال التالية

$$|f(x)| \; , \; \alpha f(x) \; ; \; \alpha \in \mathbb{R} \; , \; \frac{1}{f(x)} \; ; \; |f(x)| \geq c > 0$$

③ إذا كانت كل من الدوال $f(x)$, $g(x)$ م.ت على $[a,b]$ فإن كل من الدوال الآتية م.ت على $[a,b]$

$$f(x) \pm g(x) \; , \; g(x) \cdot f(x) \; , \; \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \geq 0$$

كما أن

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f \pm g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \pm \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f \cdot g) \leq A \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) + B \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \; ; \; |f(x)| \leq A$$

$$|g(x)| \leq B$$

$$A, B > 0$$

Scanned by CamScanner

Subject: تحا جزء 2 ص 9

نتائج

- $f(x)$ محدودة التغير على $[a,b]$ فإن الدوال الآتية $f^n(x)$; $n \geq 2$ محدودة التغير
- $f^{-2}(x)$, $f^{-3}(x)$ ...... م.ت
- $f(x)$ د.م.ت على $[a,b]$ فتكون م.ت على كل من الفترتين $[a,c]$, $[c,b]$; $a<c<b$ والعكس صحيح أيضاً.

ويكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$ بالتعريف

تعميم: $f(x)$ د.م.ت على $[a,b]$ فتكون م.ت على كل من الفترات الجزئية

$$[a,c_1],[c_1,c_2],\dots,[c_{m-1},c_m],[c_m,b]$$

$$a<c_1<c_2<\dots<c_{m-1}<c_m<b$$

والعكس صحيح كما أن

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c_1}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{c_2}{\underset{c_1}{V}}(f) + \dots + \overset{c_m}{\underset{c_{m-1}}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c_m}{V}}(f)$$

تعريف: نقول أن الدالة $f(x)$ تحقق شرط ليبشتز إذا وجد ثابت $L>0$ على $[a,b]$

$$|f(x')-f(x'')| \le L\cdot|x'-x''| ; \forall x',x'' \in [a,b]$$

مبرهنة: $f(x)$ تحقق شرط ليبشتز إذا وجد ثابت $L>0$ على المجال $[a,b]$ فتكون م.ت على هذا المجال

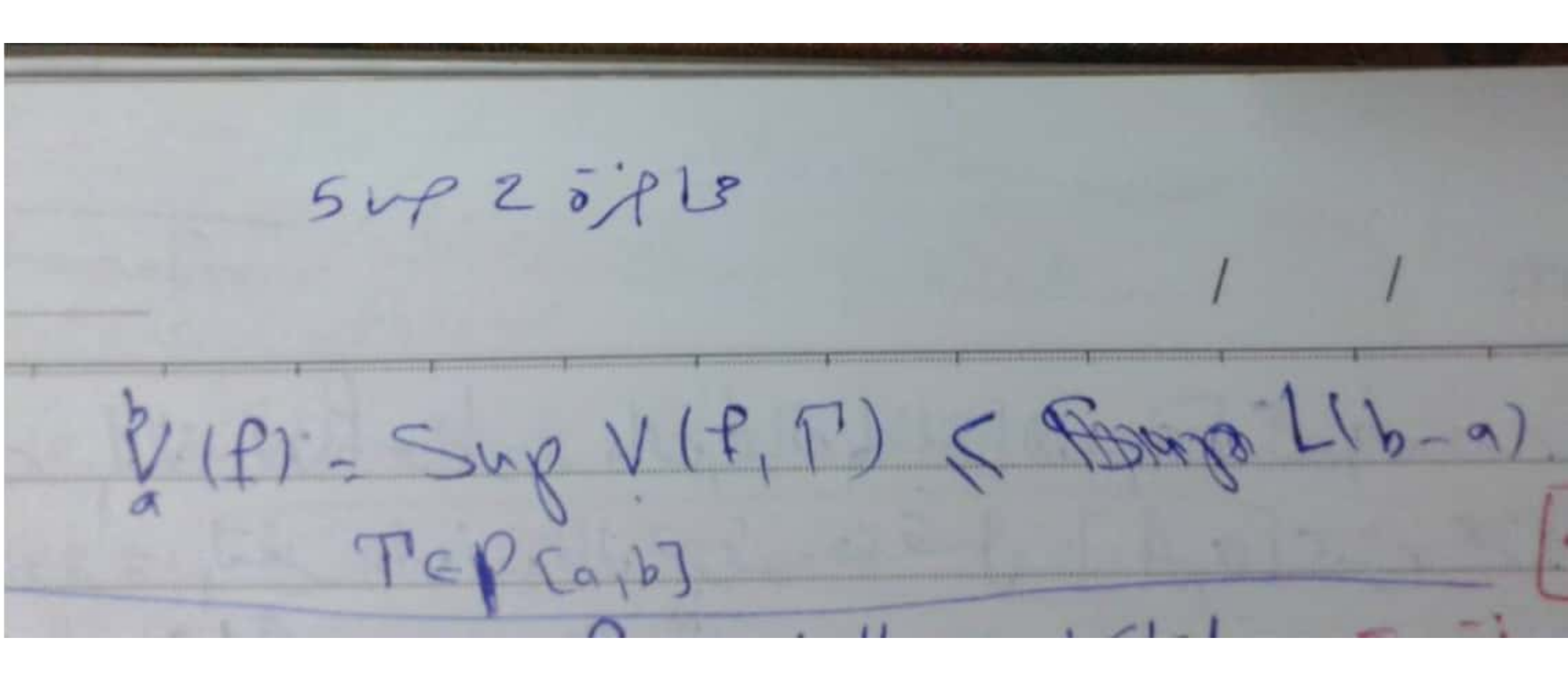
الإثبات: لتكن T تجزئة ما اختيارية.

$$T: [a=x_0<x_1<\dots<x_n=b]$$

المجموع الموافق $V(f,T) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$

$$\le \sum_{k=1}^{n} L(x_k-x_{k-1}) = L(b-a)$$

وعليه فإن الدالة $f(x)$ تكون م.ت على $[a,b]$ لأن



محاضرة 2 ص 5

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{T \in P[a,b]} V(f, T) \leq L(b-a)$$

Scanned by CamScanner